CONCOURS D'ADMISSION A L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1985

•

CONCOURS SCIENCES

MATHEMATIQUES I

Durée : 4 heures

Mardi 30 avril 1985 de 8 heures à 12 heures

•

& désigne le plan affine euclidien orienté, rapporté au repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Un point M de & est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y) dans $\mathcal{R}$, ou par ses coordonnées polaires (ρ, θ), le pôle étant O, et l'axe polaire dirigé par $\vec{\imath}$. E désigne l'espace vectoriel associé à &.

— I —

1) On considère les coniques (C) d'équation cartésienne :

$$x^2 + 2\lambda xy + \mu y^2 = ay \quad . \qquad (1)$$

a, λ, μ, étant trois paramètres réels avec $a \neq 0$.

α) Ecrire leur équation polaire : $\rho = \varphi(\theta)$. (2)

β) Construire (par le procédé qui paraîtra le meilleur) les courbes (C_0) et (C_1) correspondant à a positif, avec pour :

$$(C_0) : \lambda = \frac{1}{2}, \ \mu = 0 ; \qquad \text{pour } (C_1) : \lambda = \frac{1}{2}, \ \mu = 1 .$$

On déterminera dans chaque cas les points où la tangente est dirigée par $\vec{\imath}$.

Calculer l'aire du domaine plan limité par (C_1).

2) On considère la forme quadratique H définie sur E par :

$$\text{Si } \vec{X} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}, \ H(\vec{X}) = x^2 + 2\lambda xy + \mu y^2 .$$

Montrer rapidement que H est bien une forme quadratique, et déterminer sa signature. Préciser la nature de la conique (C).

On admettra que si H est définie positive, (C) est une ellipse; que si H est dégénérée, (C) est une parabole; et enfin que si H a pour signature (1, 1), (C) est une hyperbole. Discuter.

3) Trouver un vecteur $\vec{k}$ de E qui soit non nul, et orthogonal à $\vec{\imath}$ relativement à H. Vérifier que $(\vec{\imath}, \vec{k})$ est une base de E.

Ecrire l'équation des coniques (C) dans le repère $\mathcal{R}' = (O, \vec{\imath}, \vec{k})$.

Dans le cas où la conique n'est pas une parabole, donner les coordonnées de son centre de symétrie dans $\mathcal{R}'$, puis dans $\mathcal{R}$.

— II —

On considère la courbe (Γ) d'équation polaire $\rho = f(\theta)$, f étant définie au voisinage de $\theta = 0$. On suppose que f est dérivable à l'ordre 3 en $\theta = 0$, et que $f(0) = 0$.

1) Donner l'allure de (Γ) au voisinage de $\theta = 0$ dans les cas suivants :

a) $f'(0) \neq 0$ b) $f'(0) = 0$ et $f''(0) \neq 0$.

Dans toute la suite, on supposera que $f'(0) \neq 0$.

2) Donner l'équation polaire du cercle osculateur en 0 à la courbe (Γ) .

3) Ecrire l'équation polaire $\rho = g_r(\theta)$ du cercle tangent en 0 à l'axe polaire, dont le centre a pour ordonnée r .

Pour quelle valeur de r a-t-on :

$$f(\theta) - g_r(\theta) = \theta\ \varepsilon(\theta) \qquad \text{avec } \varepsilon(\theta) \longrightarrow 0 \qquad \text{lorsque } \theta \longrightarrow 0 .$$

Quel cercle obtient-on dans ce cas ?

4) On reprend les notations du I, 1 : $\rho = \varphi(\theta)$ est l'équation (2).

Pour quelles valeurs de a, λ, écrites en fonction de $f'(0)$ et $f''(0)$ a-t-on :

$$f(\theta) - \varphi(\theta) = \theta^2\ \varepsilon(\theta) \qquad \text{avec } \varepsilon(\theta) \longrightarrow 0 \qquad \text{lorsque } \theta \longrightarrow 0 .$$

On notera (S) l'ensemble des coniques ainsi trouvées. Montrer que l'ensemble des centres de ces coniques est une droite (D) que l'on précisera : (D) est l'axe de déviation de la courbe (Γ) en 0 .

L'ensemble (S) contient-il toujours une parabole ? Un cercle ? Discuter.

5) Montrer qu'il existe dans (S) une seule conique (H) appelée conique hyperosculatrice à (Γ) en 0, d'équation polaire $\rho = \Psi(\theta)$ telle que :

$$f(\theta) - \Psi(\theta) = \theta^3\ \varepsilon(\theta) \qquad \text{avec } \varepsilon(\theta) \longrightarrow 0 \qquad \text{lorsque } \theta \longrightarrow 0 .$$

Ecrire les coordonnées de son centre éventuel.

- III -

1) (Γ) désigne la courbe d'équation cartésienne : $y = chx$, que l'on va étudier au voisinage du point Ω de coordonnées cartésiennes $(0, 1)$. On passe en coordonnées polaires de pôle Ω, d'axe polaire dirigé par $\vec{\imath}$.

L'équation polaire de (Γ) s'écrit alors :

$$\rho = \varepsilon \sqrt{x^2 + (chx - 1)^2} \qquad (\varepsilon = \text{signe de } x) \qquad \text{et} \quad \theta = \operatorname{Arctg}\left(\frac{chx - 1}{x}\right) .$$

Montrer que la fonction g qui à x associe θ est indéfiniment dérivable au voisinage de 0, que g est inversible au voisinage de 0, et que sa fonction réciproque g^{-1} admet, au voisinage de $\theta = 0$, un développement limité d'ordre 3 que l'on précisera.

2) En déduire le développement limité d'ordre 3, au voisinage de $\theta = 0$, de la fonction $\theta \to \rho(\theta)$. Préciser pour la courbe (Γ), en Ω, l'axe de déviation et la conique hyperoscultrice.

3) (Γ) désigne la courbe d'équation $y = e^x$. Soit A le point de coordonnées cartésiennes $(0, 1)$. Donner l'équation cartésienne de l'axe de déviation de (Γ) en A, et préciser la nature de la conique hyperosculatrice à (Γ) en A .